Théorème de Schwarz :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\begin{cases}U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $D_{1,2}f=D_{2,1}f$.

dém. :

Soit $a=(a_1,a_2)\in U$.

Puisque $a\in U$ et que U est ouvert, il existe $\alpha>0$ tel que $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]\times[a_2-\alpha,a_2+\alpha]\subset U$.

Considérons $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|h\|\leq\alpha$ de sorte que $h_1\in[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$ et $h_2\in[a_2-\alpha,a_2+\alpha]$.

Posons

$$\Delta(h)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2).$$

Nous allons établir l'égalité voulue en étudiant de deux manière la limite quand $h\to 0$ de $\Delta(h)/h_1h_2$.

Commençons en considérant l'application $t\mapsto f(t,a_2+h_2)-f(t,a_2)$. Celle-ci est définie au moins sur l'intervalle $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$ et a pour fonction dérivée $t\mapsto D_1f(t,a_2+h_2)-D_1f(t,a_2)$. En lui appliquant le TAF entre a_1 et a_1+h_1 qui sont éléments de $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$, on obtient l'existence d'un élément $c_1(h)$ compris entre a_1 et a_1+h_1 tel que :

$$\Delta(h)=h_1\big(D_1f(c_1(h),a_2+h_2)-D_1f(c_1(h),a_2)\big).$$

En appliquant à nouveau le TAF, cette fois-ci à l'application $t\mapsto D_1f(c_1(h),t)$ entre a_2 et a_2+h_2, on obtient l'existence d'un élément $c_2(h)$ compris entre a_2 et a_2+h_2 tel que :

$$\Delta(h)=h_1h_2D_{2,1}f(c_1(h),c_2(h)).$$

Quand $h\to(0,0)$, $h_1\to 0$ et $h_2\to 0$ donc par encadrement $c_1(h)\to a_1$ et $c_2(h)\to a_2$. Or $D_{2,1}f$ est continue donc, par composition de limites :

$$\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\to D_{2,1}f(a_1,a_2).$$

En procédant de même, mais en appliquant le TAF à la fonction $t\mapsto f(a_1+h_1,t)-f(a_1,t)$ entre a_2 et a_2+h_2, on obtient l'existence d'un élément $d_2(h)$ intermédiaire à a_2 et a_2+h_2 tel que :

$$\Delta(h)=h_2\big(D_2f(a_1+h_1,d_2(h))-D_2f(a_2+d_2(h))\big).$$

En appliquant une dernière fois le TAF, on obtient $d_1(h)$ intermédiaire à a_1 et a_1+h_1 tel que :

$$\Delta(h)=h_2h_1D_{1,2}f(d_1(h),d_2(h)).$$

Cette fois-ci, quand $h\to(0,0)$:

$$\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\to D_{1,2}f(a_1,a_2).$$

Par unicité de la limite, on conclut :

$$D_{2,1}f(a_1,a_2)=D_{1,2}f(a_1,a_2).$$